Banach 空间中相对非扩张映射的强收敛定理

刘英[1],陈永利[2]
(1. 河北大学 数学与计算机学院,河北 保定 071002;2. 华北电力大学 科技学院,河北 保定 071051)

摘 要:用修正后的 Halpern's 迭代方法在 Banach 空间建立了一个迭代序列,证明了这一迭代序列强收敛到 2 个相对非扩张映射的公共不动点.

关键词:相对非扩张映射;广义投影;Halpern's 迭代;正规对偶映射
中图分类号:O177.91 **文献标志码**:A **文章编号**:1000-1565(2012)02-0118-06

Strong convergence theorems for two relatively nonexpansive mappings in a Banach space

LIU Ying[1], CHEN Yong-li[2]
(1. College of Mathematics and Computer Science, Hebei University, Baoding 071002, China;
2. College of Technology, North China Electric Power University, Baoding 071051, China)

Abstract: An iteration sequence is proposed in Banach spaces by using the modified Halpern's iteration method. That the iteration sequence converges strongly a common fixed point of two relatively nonexpansive mapping is proved.

Key words: relatively nonexpansive mapping; generalized projection; Halpern's iteration; normalized duality mapping

MSC 2010: 47H05

设 E 是一个 Banach 空间,E^* 是 E 的对偶空间. $\langle x,f\rangle$ 表示 $f\in E^*$ 在 $x\in E$ 点的函数值. 函数 $\phi:E\times E\to R$ 定义为

$$\phi(y,x)=\|y\|^2-2\langle y,Jx\rangle+\|x\|^2,\ \forall x,y\in E,$$

其中 J 表示 E 到 E^* 的正规对偶映射. 设 C 是 E 的一个闭、凸子集,T 是从 C 到自身的一个映射. 用 $F(T)$ 表示 T 的不动点集. 如果 $\{x_n\}\subset C$ 使得 $\{x_n\}$ 弱收敛到 p,而且 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-Tx_n)=0$,则称点 $p\in C$ 是 T 的渐进不动点[1]. T 的渐进不动点的集合表示为 $\hat{F}(T)$. 一映射 $T:C\to C$,如果满足:对所有的 $x,y\in C$, $\|Tx-Ty\|\leqslant\|x-y\|$,则称 T 为非扩张的,关于非扩张映射的一些研究可参见文献[2]. 如果满足:对所有 $x\in C$ 和 $p\in F(T)$, $\hat{F}(T)=F(T)$ 且 $\phi(p,Tx)\leqslant\phi(p,x)$,则称 T 为相对非扩张的[1]. 相对非扩张映射的一些渐近性质可

收稿日期:2011-04-27
基金项目:河北省高等学校自然科学研究青年基金资助项目(2010110);河北省自然科学青年基金资助项目(A2011201053;A2010000191);国家自然科学基金资助项目(11101115)
第一作者:刘英(1977-),女,河北邢台人,河北大学副教授,主要从事非线性泛函分析方面的研究.
E-mail: ly_cyh2007@yahoo.com.cn

参见文献[1,3-5]. Halpern[5]建立了如下的迭代序列:

$$\begin{cases} u\in C, \\ x_{n+1}=\alpha_n u+(1-\alpha_n)Tx_n, n\geqslant 0, \end{cases} \tag{1}$$

这一迭代序列常常用来逼近非扩张映射 $T:C\to C$ 的不动点.

当空间 E 有一些较好性质时,迭代序列(1)有下面的一些收敛特点.

例如在 Hilbert 空间[6-8]和一致光滑的 Banach 空间[9-11]已经证明如果 $\{\alpha_n\}$ 满足下面的条件 $\alpha_n\to 0$; $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n=\infty$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|\alpha_n-\alpha_{n+1}|<\infty$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}=1$,那么迭代序列(1)有强收敛. 由于条件 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n=\infty$ 的限制,通常认为 Halpern's 迭代序列(1)有较慢的收敛速度,尽管收敛率还没被确定. 而且 Halpern[6]还证明了条件 $\alpha_n\to 0$ 和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n=\infty$ 对于迭代序列(1)在 Hilbert 空间关于非扩张映射 T 的强收敛是必要的. 因此,要想提高序列(1)的收敛,只能修正迭代序列本身.

最近,Martinez 和 Xu[12]已经对序列(1)作了一些修正,得到下面的迭代序列

$$\begin{cases} x_0=x\in C, \\ y_n=\alpha_n x_0+(1-\alpha_n)Tx_n, \\ C_n=\{u\in C: \|y_n-v\|^2\leqslant\|x_n-v\|^2+\alpha_n(\|x_0\|^2+2\langle x_n-x_0,v\rangle)\}, \\ Q_n=\{v\in C:\langle x_n-v,x_0-x_n\rangle\geqslant 0\}, \\ x_{n+1}=P_{C_n\cap Q_n}x_0, \end{cases} \tag{2}$$

且证明了只在条件 $\alpha_n\to 0$ 下就可得到在 Hilbert 空间序列(2)强收敛到 $P_{F(T)}x$,其中 T 是非扩张映射.

为了把序列(2)从 Hilbert 空间推广到 Banach 空间,Qin 和 Su[13]已经做出了这方面的努力,对一个相对非扩张映射 T 建立了如下的迭代序列:

$$\begin{cases} x_0\in C, \\ y_n=J^{-1}(\alpha_n Jx_0+(1-\alpha_n)JTx_n), \\ C_n=\{v\in C:\phi(v,y_n)\leqslant\alpha_n\phi(v,x_0)+(1-\alpha_n)\phi(v,x_n)\}, \\ Q_n=\{v\in C:\langle x_n-v,Jx_0-Jx_n\rangle\geqslant 0\}, \\ x_{n+1}=\Pi_{C_n\cap Q_n}x_0, \end{cases} \tag{3}$$

且证明了在 $\{\alpha_n\}$ 满足 $\alpha_n\subset(0,1)$, $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$ 的条件下,$\{x_n\}$ 强收敛到 $\Pi_{F(T)}x_0$.

1　预备知识

定义正规对偶映射 $J:E\to 2^{E^*}$ 为

$$J(x):=\{v\in E^*:\langle v,x\rangle=\|v\|^2=\|x\|^2\},\ \forall x\in E.$$

正规对偶映射 J 有下面的性质:

如果 E 是自反、严格凸、光滑的 Banach 空间,那么 J 是 1-1 映射,这时 J^{-1} 是从 E^* 到 E 的正规对偶映射,而且也是 1-1 映射. 如果 E 是一致光滑的,那么 J 在 E 的每个有界子集上是一致连续的.

用 $x_n\to x$ 和 $x_n\rightharpoonup x$ 分别表示 $\{x_n\}$ 强收敛到 x,和 $\{x_n\}$ 弱收敛到 x.

设 $U=\{x\in E:\|x\|=1\}$. 如果对每一个 $x,y\in U$ 和 $x\neq y$, $\|\frac{x+y}{2}\|<1$ 成立,则称 Banach 空间 E 是严格凸的;如果对任意 2 个序列 $\{x_n\},\{y_n\}\subset U$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\|\frac{x_n+y_n}{2}\|=1$,有 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-y_n\|=0$,则称 E 是一致凸的,如果对每一个 $x,y\in U$, $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\|x+ty\|-\|x\|}{t}$ 存在,则称 E 是光滑的;如果上述极限不依赖于 $x,y\in U$,则称 E 是一致光滑的. E 的光滑模 $\rho_E:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 定义为

$$\rho_E(\tau):=\sup\{\frac{\|x+y\|+\|x-y\|}{2}-1:\|x\|=1,\|y\|=\tau\}.$$

E是一致光滑的当且仅当$\lim\limits_{\tau\to 0}\frac{\rho_E(\tau)}{\tau}=0$. $\rho_E(\tau)$是连续、单增的函数,而且$\rho_E(0)=0$. E的凸性模$\delta_E:(0,2]\to[0,1]$定义为

$$\delta_E(\epsilon):=\inf\{1-\|\frac{x+y}{2}\|:x,y\in U;\epsilon=\|x-y\|\}.$$

$\delta_E(\epsilon)$是连续单增函数而且$\delta_E(0)=0$. E是一致凸的,那么E有$K-K$性质.设E是光滑的Banach空间,函数$\phi:E\times E\to R$定义为

$$\phi(y,x)=\|y\|^2-2\langle y,Jx\rangle+\|x\|^2,\forall x,y\in E.$$

由ϕ的定义,有

$$(\|y\|-\|x\|)^2\leqslant\phi(y,x)\leqslant(\|y\|+\|x\|)^2,\forall x,y\in E. \tag{4}$$

注 1[1] 如果E是严格凸、光滑的Banach空间,那么对任意的$x,y\in E$,$\phi(y,x)=0$当且仅当$x=y$.

引理 1[1] 设E是一致凸和光滑的Banach空间,设$\{y_n\}$,$\{z_n\}$是E中的2个序列,如果$\phi(y_n,z_n)\to 0$,而且,$\{y_n\}$或$\{z_n\}$是有界的,那么$y_n-z_n\to 0$.

设C是E的一非空、闭、凸子集,假定E是自反、严格凸、光滑的Banach空间,那么,对任意的$x\in E$,存在一点$x_0\in C$使得

$$\phi(x_0,x)=\min_{y\in C}\phi(y,x).$$

映射Π_C:E$\to$C定义为$\Pi_C x=x_0$被称为广义投影[1,8,13].

引理 2[9,14] 设C是光滑Banach空间E的一非空、闭、凸子集,设$x\in E$,那么$x_0=\Pi_C x$当且仅当

$$\langle x_0-y,Jx-Jx_0\rangle\geqslant 0,\forall y\in C.$$

引理 3[9,14] 设E是自反、严格凸、光滑的Banach空间,C是E的一非空、闭、凸子集,设$x\in E$,那么

$$\phi(y,\Pi_C x)+\phi(\Pi_C x,x)\leqslant\phi(y,x),\forall y\in C\text{成立}.$$

引理 4[1] 设E是一严格凸、光滑的Banach空间,C是E的一非空、闭、凸子集,设$T:C\to C$是一相对非扩张映射,那么$F(T)$是闭、凸的.

引理 5[15] 设E是一致凸的Banach空间,设$r>0$,那么存在一连续、严格增的凸函数$g:[0,2r]\to R$使得$g(0)=0$和

$$\|tx+(1-t)y\|^2\leqslant t\|x\|^2+(1-t)\|y\|^2-t(1-t)g(\|x-y\|),\forall x,y\in Br\text{和}t\in[0,1],$$

其中$Br=\{z\in E:\|z\|\leqslant r\}$.

引理 6[16] 设E是一个一致凸、一致光滑的Banach空间,如果$\|x\|\leqslant R$,且$\|y\|\leqslant R$,那么下面的不等式成立:

$$2L^{-1}R^2\delta_E(\|x-y\|/4R)\leqslant\phi(x,y)\leqslant 4LR^2\rho_E(4\|x-y\|/R),\text{其中}L\text{是一常数}.$$

2 主要结果

对任意的$x_0\in C$,定义如下的迭代序列$\{x_n\}$:

$$\begin{cases}x_0\in C,\\ z_n=\Pi_C J^{-1}(\beta_n Jx_n+(1-\beta_n)JSx_n),\\ y_n=J^{-1}(\alpha_n Jx_0+(1-\alpha_n)JTz_n),\\ C_n=\{v\in C:\phi(v,y_n)\leqslant\alpha_n\phi(v,v_0)+(1-\alpha_n)\phi(v,x_n)\},\\ Q_n=\{v\in C:\langle x_n-v,Jx_0-Jx_n\rangle\geqslant 0\},\\ x_{n+1}=\Pi_{C_n\cap Q_n}x_0.\end{cases} \tag{5}$$

其中$\{\alpha_n\}$,$\{\beta_n\}$满足$0\leqslant\alpha_n<1$,$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$,$0<\beta_n<1$,和$\lim\limits_{n\to\infty}\inf\beta_n(1-\beta_n)>0$.

定理 1 设E是一致凸和一致光滑的Banach空间,C是E的一非空、闭、凸子集,假定T,S是2个从C到自身的相对非扩张映射以致于$F=F(T)\cap F(S)\neq\varnothing$,那么由式(5)定义的迭代序列$\{x_n\}$强收敛到$\Pi_F x_0$.

证明 首先表明对每一个$n\in N$,C_n和Q_n是闭凸的.由C_n和Q_n的定义,C_n是闭的,Q_n是闭凸的;又因

$$\phi(v,y_n)\leqslant\alpha_n\phi(v,v_0)+(1-\alpha_n)\phi(v,x_n)$$

等价于 $2\alpha_n\langle v,Jx_0\rangle+2(1-\alpha_n)\langle v,Jx_n\rangle-2\langle v,Jy_n\rangle\leqslant\alpha_n\|x_0\|^2+(1-\alpha_n)\|x_n\|^2-\|y_n\|^2$. 因此 C_n 是凸的. 令 $u_n=J^{-1}(\beta_nJx_n+(1-\beta_n)JSx_n)$. 根据引理3, $\|\cdot\|^2$ 的凸性, S 的定义, 对每一个 $p\in F$, 有

$$\begin{aligned}&\phi(p,z_n)\leq\phi(p,u_n)=\\&\|p\|^2-2\langle p,\beta_nJx_n+(1-\beta_n)JSx_n\rangle+\|\beta_nJx_n+(1-\beta_n)JSx_n\|^2\leqslant\\&\|p\|^2-2\beta_n\langle p,Jx_n\rangle-2(1-\beta_n)\langle p,JSx_n\rangle+\beta_n\|x_n\|^2+(1-\beta_n)\|Sx_n\|^2=\\&\beta_n\phi(p,x_n)+(1-\beta_n)\phi(p,Sx_n)\leqslant\phi(p,x_n).\end{aligned}\tag{6}$$

因此

$$\begin{aligned}&\phi(p,y_n)\leqslant\|p\|^2-2\langle p,\alpha_nJx_0+(1-\alpha_n)JTz_n\rangle+\alpha_n\|x_0\|^2+(1-\alpha_n)\|Tz_n\|^2=\\&\alpha_n\phi(p,x_0)+(1-\alpha_n)\phi(p,Tz_n)\leqslant\alpha_n\phi(p,x_0)+(1-\alpha_n)\phi(p,z_n)\leqslant\\&\alpha_n\phi(p,x_0)+(1-\alpha_n)\phi(p,x_n).\end{aligned}$$

这样, $p\in C_n$. 因此, 对每一个 $n\in N$, $F\subset C_n$. 用与文献[1]相同的证明, 可以得到对每一个 $n\in N$, $F\subset C_n\cap Q_n$. 由 Q_n 的定义和引理2, 有 $x_n=\Pi_{Q_n}x_0$. 用 $x_n=\Pi_{Q_n}x_0$ 和引理3, 对每一个 $n\in N$ 和 $p\in F\subset Q_n$

$$\phi(x_n,x_0)\leqslant\phi(p,x_0)-\phi(p,x_n)\leqslant\phi(p,x_0).$$

因此, $\phi(x_n,x_0)$ 是有界的. 而且, 从式(4), $\{x_n\}$ 也是有界的.

由 $x_{n+1}=\Pi_{C_n\cap Q_n}x_0\in Q_n$ 和引理3, 对每一个 $n\in$ N, 有 $\phi(x_n,x_0)\leqslant\phi(x_n+1,x_0)$, 即 $\{\phi(x_n,x_0)\}$ 是不减的, 这意味着 $\phi(x_n,x_0)$ 存在极限. 从引理3, 对每一个 $n\in N$, 有

$$\phi(x_{n+1},x_n)\leqslant\phi(x_{n+1},x_0)\leqslant\phi(x_n,x_0).$$

这说明 $\lim\limits_{n\to\infty}\phi(x_{n+1},x_n)=0$. 既然 $x_{n+1}\Pi_{C_n\cap Q_n}x_0\in C_n$, 从 C_n 的定义, 对每一个 $n\in N$, 有

$$\phi(x_{n+1},y_n)\leqslant\alpha_n\phi(x_{n+1},x_0)+(1-\alpha_n)\phi(x_{n+1},x_n).$$

根据 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty}\phi(x_{n+1},y_n)=0$. 用引理1, 得到

$$\lim_{n\to\infty}\|x_{n+1}-y_n\|=\lim_{n\to\infty}\|x_{n+1}-x_n\|=0.\tag{7}$$

从 $\|x_n-y_n\|\leqslant\|x_n-x_{n+1}\|+\|x_{n+1}-y_n\|$, 有

$$\|x_n-y_n\|\to0,(n\to\infty).\tag{8}$$

因为 J 在每个有界集上是一致连续的, 因此

$$\lim_{n\to\infty}\|Jx_{n+1}-Jy_n\|=\lim_{n\to\infty}\|Jx_{n+1}-Jx_n\|=\lim_{n\to\infty}\|Jx_n-Jy_n\|=0.\tag{9}$$

另一方面, 对每一个 $n\in$ N,

$$\begin{aligned}&\|Jx_{n+1}-Jy_n\|=\|\alpha_n(Jx_{n+1}-Jx_0)+(1-\alpha_n)(Jx_{n+1}-JTz_n)\|\geqslant\\&(1-\alpha_n)\|Jx_{n+1}-JTz_n\|-\alpha_n\|Jx_0-Jx_{n+1}\|.\end{aligned}$$

因此

$$\|Jx_{n+1}-JTz_n\|\leqslant\frac{1}{1-\alpha_n}(\|Jx_{n+1}-Jy_n\|+\alpha_n\|Jx_0-Jx_{n+1}\|).$$

从 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$ 和式(9), 得到

$$\|Jx_{n+1}-JTz_n\|\to0,(0\to\infty).\tag{10}$$

既然 J^{-1} 在有界集上也是一致连续的, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_{n+1}-Tz_n\|=0$.

从 $\|x_n-Tz_n\|\leqslant\|x_n-x_{n+1}\|+\|x_{n+1}-Tz_n\|$, 有

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-Tz_n\|=0.\tag{11}$$

下一步表明 $\|x_n-Sx_n\|\to0$ 和 $\|z_n-Tz_n\|\to0$. 既然 $\{x_n\}$ 是有界的, 而且, 对 $p\in F$, $\phi(p,Sx_n)\leqslant\phi(p,x_n)$, 因此有 $\{Jx_n\}$, $\{JSx_n\}$ 也是有界的, 那么存在 $r>0$ 使得 $\{Jx_n\},\{JSx_n\}\subset B_r^*=\{x^*\in E^*,\|x^*\|\leqslant r\}$. 利用引理5, 有

$$\begin{aligned}&\phi(p,z_n)\leqslant\phi(p,u_n)=\|p\|^2-2\langle p,\beta_nJx_n+(1-\beta_n)JSx_n\rangle+\\&\beta_n\|x_n\|^2+(1-\beta_n)\|Sx_n\|^2-\beta_n(1-\beta_n)g(\|Jx_n-JSx_n\|)\leqslant\end{aligned}\tag{12}$$

$$\phi(p,x_n)-\beta_n(1-\beta_n)g(\|Jx_n-JSx_n\|).$$

因此,

$$\phi(p,u_n)<\alpha_n\phi(p,x_0)+\phi(p,x_n)-(1-\alpha_n)\beta_n(1-\beta_n)q(\|Jx_n-JSx_n\|). \tag{13}$$

即

$$(1-\alpha_n)\beta_n(1-\beta_n)g(\|Jx_n-JSx_n\|)\leqslant\alpha_n\phi(p,x_0)+\phi(p,x_n)-\phi(p,y_n)=$$
$$\alpha_n\phi(p,x_0)+2\langle p,Jy_n-Jx_n\rangle+\|x_n\|^2-\|y_n\|^2.$$

根据$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$、式(8)、式(9)、$\lim\limits_{n\to\infty}\inf\beta_n(1-\beta_n)>0$ 和 g 的性质,有

$$\|Jx_n-JSx_n\|\to0,(n\to\infty). \tag{14}$$

根据 J^{-1}在有界集上的一致连续性,有

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-Sx_n\|=0. \tag{15}$$

根据引理 6,有

$$\lim_{n\to\infty}\phi(x_n,Sx_n)=0. \tag{16}$$

根据式(5)和引理 3,有 $\phi(x_n,z_n)\leqslant\phi(x_n,u_n)\leqslant(1-\beta_n)\phi(x_n,Sx_n)$. 根据式(16),有$\lim\limits_{n\to\infty}\phi(x_n,z_n)=0$. 因此,根据引理 1,有

$$\|z_n-x_n\|\to0,(n\to\infty). \tag{17}$$

既然 $\|z_n-Tz_n\|\leqslant\|z_n-x_n\|+\|x_n-Tz_n\|$,从式(17)和式(11),有

$$\lim_{n\to\infty}\|z_n-Tz_n\|=0. \tag{18}$$

因此,从式(17),如果$\{x_{nk}\}$是$\{x_n\}$的一子列使得 $x_{nk}\rightharpoonup\hat{x}$,从式(15),(18)和相对非扩张映射的定义,有$\hat{x}\in F$.

最后,表明 $x_n\to\Pi_Fx_0$. 设 $\omega=\Pi_Fx_0$. 对每一个 $n\in\mathrm{N}$,从 $x_{n+1}=\Pi_{C_n\cap Q_n}x_0$ 和 $\omega\in F\subset C_n\cap Q_n$,有 $\phi(x_{n+1},x_0)\leqslant\phi(\omega,x_0)$.

另一方面,根据范数的弱下半连续性,有

$$\phi(\hat{x},x_0)=\|\hat{x}\|^2-2\langle\hat{x},Jx_0\rangle+\|x_0\|^2\leqslant$$
$$\lim_{k\to\infty}\inf(\|x_{nk}\|^2-2\langle x_{nk},Jx_0\rangle+\|x_0\|^2)=$$
$$\lim_{k\to\infty}\inf\phi(x_{nk},x_0)\leqslant$$
$$\lim_{k\to\infty}\sup\phi(x_{nk},x_0)\leqslant\phi(\omega,x_0).$$

根据 Π_Fx_0 的定义,得到$\hat{x}=\omega$,而且$\lim\limits_{k\to\infty}\phi(x_{nk},x_0)=\phi(\hat{x},x_0)$. 因此,有$\lim\limits_{k\to\infty}\|x_{nk}\|=\|\hat{x}\|$. 用 E 的 K-K 性质,有 $x_{nk}\to\Pi_Fx_0$. 既然 x_{nk} 是$\{x_n\}$的任一收敛子列,则$\{x_n\}$强收敛到 Π_Fx_0.

如果 $S=I$(E 上的恒等映射),那么有下面的结果.

推论 1[12] 设 E 是一致凸、一致光滑的 Banach 空间,C 是 E 的一非空、闭凸子集,设 $T:C\to C$ 是一相对非扩张映射,假定$\{\alpha_n\}\subset(0,1)$以致于$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$. 如果 $F(T)\neq\varnothing$,那么由式(3)定义的序列$\{x_n\}$强收敛到 $\Pi_{F(T)}x$.

在定理 1 中,如果 E 是 Hilbert 空间,则有下面的结论.

推论 2 设 C 是 Hilbert 空间 H 的一非空、闭、凸子集,设 S,T 是 2 个从 C 到自身的非扩张映射,使得 $F=F(T)\cap F(S)\neq\varnothing$,定义如下的迭代序列$\{x_n\}$:

$$\begin{cases}x_0\in C,\\ z_n=\beta_nx_n+(1-\beta_n)Sx_n,\\ y_n=\alpha_nx_0+(1-\alpha_n)Tz_n,\\ C_n=\{v\in C:\|v-y_n\|^2\leqslant\alpha_n\|v-x_0\|^2+(1-\alpha_n)\|v-x_n\|^2\},\\ Q_n=\{v\in C:\langle x_n-v,x_0-x_n\rangle\geqslant0\},\\ x_{n+1}=P_{C_n\cap Q_n}x_0.\end{cases}$$

在$\{\alpha_n\}$,$\{\beta_n\}$满足 $0\leqslant\alpha_n<1$,$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$,$0<\beta_n<1$,$\lim\limits_{n\to\infty}\inf\beta_n(1-\beta_n)>0$ 的条件下,$\{x_n\}$强收敛到 P_Fx_0. 其中 $P_{C_n\cap Q_n}$ 和 P_F 分别是从 C 到 $C_n\cap Q_n$ 和到 F 上的度量投影.

证明 根据文献[1],在 Hilbert 空间,非扩张映射就是相对非扩张映射,$\phi(x,y)=\|x-y\|^2$,因此,用

定理 1 可得所需结果.

参 考 文 献:

[1] MATSUSHITA S, TAKAHASHI W. A strong convergence theorem for relatively nonexpansive mappings in a Banach space[J]. J Approx Theory, 2005, 134: 257 - 266.

[2] 张丽娟,陈俊敏. 有关非扩张映射的带误差的迭代收敛定理[J]. 河北大学学报:自然科学版, 2007, 27(3): 238 - 240.
ZHANG Lijuan, CHEN Junmin. Weak and strong convergence of a scheme with errors for three nonexpansive mappings [J]. Journal of Hebei University: Natural Science Edition, 2007, 27(3): 238 - 240.

[3] BUTNARIU D, REICH S, ZASLAVSKI A J. Asymptotic behavior of relatively nonexpansive operators in Banach spaces [J]. J Appl Anal, 2001, 7: 151 - 174.

[4] BUTNARIU D, REICH S, ZASLAVSKI A J. Weak convergence of orbits of nonlinear operators in reflexive Banach spaces [J]. Numer Funct Anal Optim, 2003, 24: 489 - 508.

[5] CENSOR Y, REICH S. Iterations of paracontractions and firmly nonexpansive operators with applications to feasibility and optimization[J]. Optimization, 1996, 37: 323 - 339.

[6] HALPERN B. Fixed points of nonexpanding maps[J]. Bull Amer Math Soc, 1967, 73: 957 - 961.

[7] ISHIKAWA S. Fixed points by a new iteration method[J]. Proc Amer Math Soc, 1974, 44: 147 - 150.

[8] WITTMANN R. Approximation of fixed points of nonexpansive mappings[J]. Arch Math. 1992, 58: 486 - 491.

[9] ALBER Y I, REICH S. An iterative method for solving a class of nonlinear operator equations in Banach spaces[J]. Panamer Math J, 1994, 4: 39 - 54.

[10] SHIOJI N, TAKAHASHI W. Strong convergence of approximated sequences for nonexpansive mappings in Banach spaces [J]. Proc Amer Math Soc, 1997, 125: 3641 - 3645.

[11] XU Hongkun. Iterative algorithms for nonlinear operators[J]. J London Math Soc, 2002, 66: 240 - 256.

[12] MARTINEZ C Y, XU Hongkun. Strong convergence of the CQ method for fixed point iteration processes[J]. Nonl Anal, 2006, 64: 2400 - 2411.

[13] QIN Xiaolong, SU Yongfu. Strong convergence theorems for relatively nonexpansive mappings in a Banach space[J]. Nonl Anal, 2007, 67: 1958 - 1965.

[14] KAMIMURA S, TAKAHASHI W. Strong convergence of a proximal-type algorithm in a Banach space[J]. SIAM J Optim, 2002, 13: 938 - 945.

[15] XU Hongkun. Inequalities in Banach spaces with applications[J]. Nonl Anal, 1991, 16: 1127 - 1138.

[16] CHIDUME C E, KHUMALO M, ZEGEYEH. Generalized projection and qpproximation of fixed points of nonself maps [J]. J Approx Theory, 2003, 120: 242 - 252.

(责任编辑:王兰英)