

# 一类随机规划的蒙特卡罗回溯优化求解方法

马新顺, 石彤菊

(华北电力大学 数理学院, 河北 保定 071003)

**摘 要:**针对一类随机规划问题构造了基于蒙特卡罗的回溯优化求解法,该方法本质属于一种动态搜索算法,通过迭代求解一系列样本确定性优化问题并经样本容量逐渐增加过程而逼近随机问题的最优解,而迭代终止条件由需求的计算精度确定,并具体给出了近似解的计算方法及迭代终止条件.最后,通过算例验证了该方法的有效性.

**关键词:**随机规划;蒙特卡罗模拟;回溯优化法;样本近似方法

**中图分类号:**O 427.4

**文献标识码:**A

**文章编号:**1000-1565(2008)06-0568-04

## Monte Carlo Based Retrospective Optimization Method to Solve One Class of Stochastic Programming

MA Xin-shun, SHI Tong-ju

(School of Mathematics and Physics, North China Electric Power University, Baoding 071003, China)

**Abstract:** This paper present an essential dynamic search method named retrospective optimization algorithm based on a sequence of sample path approximation to the original problem with increasing sample size and decreasing the tolerance error. A stopping rule of the algorithm and a calculation of the approximating solution are studied and proposed. Numerical example with an expectation model is employed to demonstrate the efficiency for the presented algorithm.

**Key words:** stochastic programming; Monte Carlo simulation; retrospective optimization; simple parth method

考虑如下—类随机规划的求解问题<sup>[1]</sup>

$$(P) \begin{cases} \max E[f(x, \zeta)] \\ \text{s. t. } E[g_{l_1}(x, \zeta)] \leq 0 (l_1 \in L_1), \\ E[h_{l_2}(x, \zeta)] \leq 0 (l_2 \in L_2) \end{cases} \quad (1)$$

式中:  $x \in X \subset R^d$  为  $d$  维决策变量,  $\zeta$  为 1 个  $n$  维连续型随机向量,  $f(x, \zeta)$  为目标函数,  $g_{l_1}(x, \zeta)$  和  $h_{l_2}(x, \zeta)$  为约束函数,  $L_1, L_2$  为标号集且满足  $|L_2| < d(|L_2|$  表示集  $L_2$  的标号总数)  $E$  表示关于  $\zeta$  的数学期望算子.

实际问题中,由于随机向量  $\zeta$  分布的复杂性,一般不能直接将随机问题  $(P)$  转化为确定性等价类,而需

收稿日期:2007-12-20

基金项目:国家自然科学基金资助项目(10471033);华北电力大学博士学位教师科研基金资助项目(200612005)

第一作者:马新顺(1964—),男,河北定州人,华北电力大学教授,博士,主要研究领域为最优化理论、方法及其在电力市场中的应用.

要寻求近似求解方法,特别是将(P)转化为样本确定性问题,并通过蒙特卡罗模拟求解<sup>[2]</sup>.其基本过程是:首先对每个可行解 $x$ 采用蒙特卡罗模拟技术生成随机变量 $\zeta$ 的多个独立抽样,计算样本均值并获得问题(P)的近似问题,求解该近似问题即得近似最优解.在使用这种方法进行求解的过程中,样本容量(即随机抽样次数)的选择至关重要,即当选择容量过小时往往由于估计值的变异太大而误导搜索方向找不到最优解,而选择了太大的样本容量又可能导致计算程序失败.一般,随机模拟次数常常依靠人为的主观判断或经过大量的计算试验确定,具有很大的盲目性.

本文基于蒙特卡罗模拟技术,应用回溯优化(Retrospective Optimization, RA)思想,给出了求解随机问题(P)的1种近似求解方法,并经算例进行了有效性检验.回溯优化的要领最早出现在文献[3]中并给出了1个要领性的方法框架,文献[4]在研究分位数计算问题时给出了1种回溯近似算法,文献[5]研究了求解随机方程近似根问题,构造了基于独立和不完全独立2种随机抽样法的回溯近似算法,结果表明它们都能以概率1收敛到方程的根,文献[5]对回溯求解方法的发展历史进行了综述,并给出了一类回溯优化方法的框架.

## 1 基于蒙特卡罗的随机模拟回溯优化方法

假设在第 $i$ 次迭代过程中选择的样本容量为 $m_i$ ,由蒙特卡罗随机模拟技术构造的问题(P)的样本近似问题为

$$(P_i) \begin{cases} \max \bar{f}[f(x, \zeta^{(i)})] \\ \text{s. t. } \bar{g}_{l_1}(x, \zeta^{(i)}) \leq 0 (l_1 \in L_1), \\ \bar{h}_{l_2}(x, \zeta^{(i)}) = 0 (l_2 \in L_2) \end{cases} \quad (2)$$

式中 $\zeta^{(i)} = (\zeta^{(i1)}, \zeta^{(i2)}, \dots, \zeta^{(im_i)})$ ,这里, $\zeta^{(i1)}, \zeta^{(i2)}, \dots, \zeta^{(im_i)}$ 为由蒙特卡罗法产生的 $m_i$ 个独立抽样,而 $\zeta^{(i*)} = (\zeta_1^{(i*)}, \zeta_2^{(i*)}, \dots, \zeta_n^{(i*)})^T$ , $\bar{f}$ , $\bar{g}_{l_1}$ 和 $\bar{h}_{l_2}$ 由下式确定

$$\begin{aligned} \bar{f}(x, \zeta^{(i)}) &= \frac{1}{m_i} \sum_{j=1}^{m_i} f(x, \zeta_j^{(i)}), \bar{g}_{l_1}(x, \zeta^{(i)}) = \frac{1}{m_i} \sum_{j=1}^{m_i} g_{l_1}(x, \zeta_j^{(i)}) (l_1 \in L_1), \\ \bar{h}_{l_2}(x, \zeta^{(i)}) &= \frac{1}{m_i} \sum_{j=1}^{m_i} h_{l_2}(x, \zeta_j^{(i)}) (l_2 \in L_2). \end{aligned} \quad (3)$$

由式(3)计算相应的数学期望而却步值所产生的误差为 $O(1/\sqrt{m_i})$ ,所以,当 $m_i$ 足够大时,随机规划(P)的近似最优解可通过求解 $(P_i)$ 得到.当 $\zeta^{(i)}$ 固定时,问题 $(P_i)$ 为确定性数学规划问题,即在求解过程中对不同的 $x$ 计算 $\bar{f}$ , $\bar{g}_{l_1}$ 和 $\bar{h}_{l_2}$ 时使用相同的 $m_i$ 及 $\zeta^{(i)}$ ,迭代过程采用独立抽样方法并随迭代次数 $i$ 的增加 $m_i$ 逐渐增大,使得求问题 $(P_i)$ 所得的解逐渐逼近(P)的最优解.下面讨论近似最优解及迭代终止条件.

由于求解问题 $(P_i)$ 所得的最优解 $x^{(i)}$ 也为随机变量,记为 $x^{(x)} = (x_1^{(x)}, x_2^{(x)}, \dots, x_d^{(x)})$ ,这样,在第 $i$ 次迭代后问题(P)的最优解的估计值 $\bar{x}^{(i)}$ 也为随机变量,记为 $x^{(x)} = (x_1^{(x)}, x_2^{(x)}, \dots, x_d^{(x)})$ ,这样,在第 $i$ 次迭代后问题(P)的最优解的估计值 $\bar{x}^{(i)} = (\bar{x}_1^{(i)}, \bar{x}_2^{(i)}, \dots, \bar{x}_d^{(i)})$ 可由下式得到

$$\bar{x}_j^{(i)} = \frac{\sum_{t=1}^i m_t x_j^{(t)}}{\sum_{t=1}^i m_t} (j = 1, 2, \dots, d), \quad (4)$$

即 $\bar{x}^{(i)}$ 由前 $i$ 次求解 $(P_i)$ 所得最优解 $x^{(t)}$ ( $t = 1, 2, \dots, i$ )的加权平均构成.

以式(4)所确定的估计值 $\bar{x}^{(i)}$ 作为(P)的最优解时,其标准差或方差的大小反映了计算精度并可以此作为迭代求解过程终止条件的判据.采用下面的无偏估计作为 $\text{Var}(\bar{x}_j^{(i)})$ 的估计值

$$s^2(\bar{x}_j^{(i)}) = \frac{\sum_{t=1}^i m_t (x_j^{(t)} - \bar{x}_j^{(i)})^2}{(i-1) \sum_{t=1}^i m_t} (j = 1, 2, \dots, d). \quad (5)$$

取定容许误差限 $\delta > 0$ ,则 $\max_{1 \leq j \leq d} s(\bar{x}_j^{(i)}) < \delta$ 即可作为迭代终止的判据.综上所述,求解问题(P)的回溯优化求解方法可描述如下.

step 0 给定误差限  $\delta > 0$ , 初始化回溯迭代次数  $i = 1$ , 并选择相应的样本容量  $m_i$  和求解确定性规划  $(P_i)$  时所使用的容忍误差率差限  $\epsilon_i$ ; step 1 产生  $m_i$  个独立的随机向量  $\zeta^{(i1)}, \zeta^{(i2)}, \dots, \zeta^{(im_i)}$ ; step 2 使用传统的或其他优化算法求解样本确定性数学规划  $(P_i)$ , 得到回溯解  $x^{(i)}$  使满足  $\|x^{(i)} - x^{(i)*}\| < \epsilon_i$ , 这里  $\|\cdot\|$  为  $R^d$  范数,  $x^{(i)*}$  为  $(P_i)$  的精确解; step 3 按式(4) 计算问题  $(P)$  的近似最优解  $\bar{x}^{(i)}$ ; step 4 检查终止条件: 若  $\max_{1 \leq j \leq d}(\bar{x}_j^{(i)}) < \delta$  终止并输出  $\bar{x}^{(i)}$ ; 否则, 计算  $m_{i+1}$  和  $\epsilon_{i+1}$ , 并置  $i = i + 1$ , 然后转 step 1.

在上述算法中, 样本容量  $m_i$  随迭代次数  $i$  的增加逐渐增大, 而  $\epsilon_i$  的选择意味着不必在每次迭代中都精确求解样本确定性问题  $(P_i)$ , 而仅需随迭代次数的增加逐步精确化, 选择合适的  $\delta$  以实现满足精度要求的近似解. 这样, 在回溯动态求解过程中只要选择参数  $\delta, m_i$  和  $\epsilon_i$  即可求出随机规划问题的满足一定精度要求的近似解.

## 2 基于随机模拟的回溯动态法的算例

考虑如下随机规划问题<sup>[1]</sup>

$$\begin{cases} \max E[f(x, \zeta)] = E[(x_1 - \zeta_1)]\sin(\pi x_1) + (x_2 - \zeta_2)\sin(4\pi x_2) + (x_3 - \zeta_3)\sin(\pi x_3)] \\ \text{s. t.} \\ 0 \leq x_i \leq 5 (i = 1, 2, 3) \end{cases} \quad (6)$$

式中, 随机向量  $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$  服从正态分布, 其联合正态概率密度函数为

$$pdf(\zeta) = (2\pi)^{-3/2} |\Sigma|^{-1/2} \exp[-\frac{1}{2}(\zeta - \mu)\Sigma^{-1}(\zeta - \mu)^T], \quad (7)$$

其中,  $\mu = (1, 2, 3), \Sigma$  为如下正定矩阵

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 3/4 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 3/4 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

按如下规律逐渐增加蒙特卡罗抽样次数: 取定  $m_1 = 2$ , 并令  $m_i = 2m_{i-1} (i \geq 2)$ . 在计算样本确定性问题  $(P_i)$  时, 本文取  $\epsilon_i = \epsilon$  为机器精度, 即均采用 16 位十进制数字求解问题  $(P_i)$ , 这虽然降低了整个过程的一些计算速度, 但能得到该问题的较为准确的解. 求解方法采用了改进的 Nelder-Mead 单纯形搜索算法<sup>[7]</sup>, 为了获得  $(P_i)$  的全局最优解子计算过程中采用了随机生成初始单纯形的方法. 取定容许误差限  $\delta = 0.005$  则在第 15 次迭代后停止, 其第 1, 2, 7, 12 和 15 次迭代后所输出的  $\bar{x}^{(i)}, \max_{1 \leq j \leq d}(\bar{x}_j^{(i)})$  和目标值  $\bar{f}(x, \zeta^{(i)})$  由下表给出, 其中, 第 1 次迭代  $\max_{1 \leq j \leq d}(\bar{x}_j^{(i)})$  没有计算.

表 1 迭代过程的一些输出结果  
Tab. 1 Some outputs of iterations procedure

$i$	$\bar{x}^{(i)}$	$\bar{f}(x, \zeta^{(i)})$	$\max_{1 \leq j \leq d}(\bar{x}_j^{(i)})$	$m_i$
1	4.534, 4.628, 0.750	9.57		2
2	4.527, 3.308, 0.483	7.23	0.93	4
7	4.528, 2.651, 0.315	6.88	0.072	128
12	4.528, 2.635, 0.349	6.77	0.009	4 096
15	4.528, 2.635, 0.349	6.79	0.004	16 384

实际计算过程中, 从第 12 次迭代以后所得到的最优解及目标函数的估计值变化很小, 在  $i = 15$  时其所得近似最优解已满足要求, 因此, 可将 (4.528, 2.635, 0.349) 作为由式(6) 所确定的随机问题的最优解.

### 3 结束语

随机规划已广泛的应用于各种实际问题,由于一般不能将其转化为确定性问题,基于蒙特卡罗随机模拟方法是目前其求解的普遍方法,即将其转化为样本近似问题,但究竟选择多大的样本容量存在很多盲目性且易导致该方法失效.本文提出的求解这类问题的回溯优化求解方法本质上属于动态搜索算法,在迭代过程中回溯检查样本解的与最优解近似程度并动态的增加模拟次数以达到所需要的计算精度要求,算例表明该方法是可行和有效的.

#### 参考文献:

- [1] 刘宝碇,赵瑞清. 随机规划与模糊规划[M]. 北京:清华大学出版社,1998.
- [2] FISHMAN G S. Monte carlo: concepts, algorithms and applications[M]. New York:Springer Verlag,1995.
- [3] HEALY K, SCHRUBEN L W. Retrospective simulation response optimization[C]. Proceeding of the 1991 Winter Simulation Conference, Phoenix, USA, 1991.
- [4] CHEN H, SCHREIBERR B W. Retrospective approximation algorithms for stochastic root finding[C]. Proceeding of the 1994 Winter Simulation Conference, Lake Buena Vista, USA, 1994.
- [5] CHEN H, SCHMEISER B W. Stochastic root finding via retrospective approximation[J]. IIE Transactions, 2001,33:259-275.
- [6] JIN J, SCHMEISER B. Simulation-based retrospective optimization of stochastic systems: a family of algorithms[C]. Proceeding of the 2003 Winter Simulation Conference, New Orleans, USA, 2003.
- [7] NELDER J A, MEAD R. A simplex method for function minimization[J]. Computer Journal, 1965,17:308-313.

(责任编辑:李洪建)

---

(上接第 567 页)

#### 参考文献:

- [1] IWANIEC T, MARTIN G. Geometric function theory and nonlinear analysis[M]. Oxford: Clarendon Press, 2001.
- [2] IWANICE T.  $P$ -harmonic tensors and quasiregular mappings[J]. Ann of Math, 1992,136:586-624.
- [3] IWANIEC T, MARTIN G. Quasiregular mappings in even dimensions[J]. Acta Math, 1993,170:29-81.
- [4] 高红亚,张 昱.  $A$ -调和和张量的双权积分不等式[J]. 河北大学学报(自然科学版),2008,28(2):124-126.
- [5] 高红亚,何 茜,佟玉霞.  $A$ -调和和方程障碍问题解的局部正则性[J]. 河北大学学报(自然科学版),2007,27(5):453-455.

(责任编辑:李洪建)