Townsend电晕放电理论新探索

孙可平,曹永友
(上海海事大学 EMC与静电研究室,上海 200135)

摘 要:从汤逊(Townsend)基本假设出发,建立了柱型金属接地料仓内同轴电晕导线结构下的电场分布理论模型,给出了2种不同条件下的精确解,给出了包括Kaptsov假设在内的更一般表达式,为进一步讨论汤逊电晕放电奠定了基础.

关键词:电晕放电;粉体料仓;静电安全技术;汤逊放电
中图分类号:O 441.1;X 928 **文献标识码**:A **文章编号**:1000-1565(2007)06-0573-04

Novel Foundation on Townsend Corona Discharge

SUN Ke-ping, CAO Yong-you
(Research Section of EMC and Electrostatics, Shanghai Maritime University, Shanghai 200135, China)

Abstract: Under the conditions of Townsend' assumption on corona discharge , this paper presented a model of electric field distribution between earthed metal cylindrical silo and concentric corona wire; The paper has gotten the exact solutions second-order ordinary differential equation for V in cylindrical coordinates; The paper presented a exact commonly expression including Kaptsov' assumption. The present work can be used as theoretical foundation of prevention discharge hazards.

Key words: corona discharge; powder silo; electrostatic safety technology; Townsend discharge

电晕放电,在现代静电学及现代静电技术中的应用越来越广泛.例如,静电除尘技术中的粒子荷电,静电消除器中的尖端放电,驻极体中的薄膜喷电,低温等离子体的电晕放电等.在粉体料仓静电安全技术的研究中,也多次涉及电晕放电的理论与实践.如何实现既能量适中、又安全可靠的电晕放电,在降低料仓空间电位关键技术的研究中有着举足轻重的影响.可以说,整个研究过程中,必须始终面对电晕放电的基本理论与实践.正是在多次涉及、研究、探索柱型料仓与同轴电晕导线之间电场分布、电晕电流规律时,发现了经典电晕理论中存在不少缺陷,例如,电晕放电理论基石之一的汤逊(Townsend)理论缺乏严密的数学推导;被人们广为引用的汤逊(Townsend)公式缺乏数学上的严密与精确.汤逊(Townsend)公式的成立条件也不明确.被当代应用静电学广泛引用的Warburg公式仅是一个经验公式.它的理论基础是什么,适用条件又如何,也值得思考与探索.为此,笔者从汤逊(Townsend)基本假设出发,对"柱型料仓内同轴电晕导线电晕放电理论"进行了研究与探索,得出了一些新结果、新结论.因篇幅所限,更详细的讨论将在另文发表.

收稿日期:2007-07-20
基金项目:上海市教委基金资助项目(06F2002)
作者简介:孙可平(1945-),男,河南商丘人,上海海事大学教授,博士生导师,主要从事电磁兼容与静电技术方向研究.

1 模型

设 1 个半径为 R_i 的圆柱型导线,同轴地放置在半径为 R_0 的柱型料仓内,外圆柱即料仓接地,电位恒为零.内部导线电位维持在 U_i,在柱坐标下,这 2 个柱型电极结构之间的空间电位 U 满足泊淞(Poisson)方程

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\right)=-\frac{q}{q_0}. \tag{1}$$

式中:U——两柱型电极之间的空间电位.它与电场强度之间的关系为 $E=-\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}$;$q$——柱型电极之间的电荷密度;$\varepsilon_0$——真空介电常数.

假设

1)内部电极电晕线表面的电场强度是 1 个常量(与汤逊假设相一致),其大小由 Peek 的半球公式电离阈值给出[1].这样的假设,忽略了加致电晕线上的电压变化,使电场强度维持在电离壳层表面电晕开始时的阈值强度,这就是著名的 Kaptsov 假设.

2)与汤逊(Townsend)假设相一致[2-3],认为电晕线的电晕电流是所谓"小电流",且保持稳定、均匀.

3)在内外柱型电极之间,既无电荷载流子的"源",又无载流子的"漏",根据电荷守恒定律,沿轴向单位长度上的电流密度在稳定情况下不变,即$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}z}=0$.

4)与所有研究者一样,忽略空气对流.

2 柱型料仓与同轴电晕导线之间电压、电场分布精确解的数学推导

在上述假设条件下,载流子的速度与电场强度之间的关系式为 $\vec{V}=\mu\vec{E}$,式中 μ 为离子迁移率.

考虑到电场强度与电位的关系式 $\vec{E}=-\mathrm{grand}\,U$,则很容易得到柱型电极之间沿轴向单位长度上的电流密度为

$$J=-2\pi rq\mu E. \tag{2}$$

从上式很容易得到非线性二次偏微分方程

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\right)^2=2\left(\frac{J}{2\pi\varepsilon_0\mu}\right). \tag{3}$$

其精确解为

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}=\pm\sqrt{\left(\frac{J}{2\pi\varepsilon_0\mu}\right)+\frac{C_1}{r^2}}, \tag{4}$$

式中 C_1 为积分常数.

上式平方根的符号取决于空间电荷的极性和电流的流向.从(4)可进一步得出

当 $C_1\geqslant 0$ 时

$$|U|=-\sqrt{\left(\frac{J}{2\pi\varepsilon_0\mu}\right)+C_1}+\sqrt{C_1}\,\mathrm{artanh}\left[\frac{\sqrt{\left(\frac{J}{2\pi\varepsilon_0\mu}\right)r^2+C_1}}{\sqrt{C_1}}\right]+C_2. \tag{5}$$

当 $C_1<0$ 时

$$|U|=-\sqrt{\left(\frac{J}{2\pi\varepsilon_0\mu}\right)r^2+C_1}+\sqrt{-C_1}\,\mathrm{arctan}\left[\frac{\sqrt{\left(\frac{J}{2\pi\varepsilon_0\mu}\right)r^2+C_1}}{\sqrt{-C_1}}\right]+C_2. \tag{6}$$

式中 C_1,C_2 为积分常数,可从下述边界条件求出

$$r=R_i\ \text{时},\ U=U_i. \tag{7}$$

$$r = R_0 \text{ 时}, U = 0(\text{外圆柱接地}). \tag{8}$$

从(5)(6)消去 C_2 并使用边界条件(7)得

当 $C_1 \geqslant 0$ 时

$$|U_i| = \sqrt{\left(\frac{J}{2\pi\varepsilon_0\mu}\right)R_0^2 + C_1} - \sqrt{\left(\frac{J}{2\pi\varepsilon_0\mu}\right)R_i^2 + C_1} -$$

$$\sqrt{C_1}\,\mathrm{artanh}\left[\sqrt{C_1}\frac{\sqrt{\left(\frac{J}{2\pi\varepsilon_0\mu}\right)R_0^2 + C_1} - \sqrt{\left(\frac{J}{2\pi\varepsilon_0\mu}\right)R_i^2 + C_1}}{C_1 - \sqrt{\left(\frac{J}{2\pi\varepsilon_0\mu}\right)R_0^2 + C_1}\sqrt{\left(\frac{J}{2\pi\varepsilon_0\mu}\right)R_0^2 + C_1}}\right] =$$

$$\sqrt{\left(\frac{J}{2\pi\varepsilon_0\mu}\right)R_0^2 + C_1} - \sqrt{\left(\frac{J}{2\pi\varepsilon_0\mu}\right)R_i^2 + C_1} +$$

$$\sqrt{C_1}\ln\left(\frac{R_0}{R_i}\right) - \sqrt{C_1}\ln\left[\frac{\sqrt{\left(\frac{J}{2\pi\varepsilon_0\mu}\right)R_0^2 + C_1} + C_1}{\sqrt{\left(\frac{J}{2\pi\varepsilon_0\mu}\right)R_i^2 + C_1} + \sqrt{C_1}}\right]. \tag{9}$$

当 $C<0$ 时

$$|U_i| = \sqrt{\left(\frac{J}{2\pi\varepsilon_0\mu}\right)R_0^2 + C_1} - \sqrt{\left(\frac{J}{2\pi\varepsilon_0\mu}\right)R_i^2 + C_1} - \sqrt{-C_1}\arctan$$

$$\left[\sqrt{-C_1}\frac{\sqrt{\left(\frac{J}{2\pi\varepsilon_0\mu}\right)R_0^2 + C_1} - \sqrt{\left(\frac{J}{2\pi\varepsilon_0\mu}\right)R_i^2 + C_1}}{\sqrt{\left(\frac{J}{2\pi\varepsilon_0\mu}\right)R_0^2}} \times C_1\sqrt{\left(\frac{J}{2\pi\varepsilon_0\mu}\right)R_i^2 + C_1} - C_1\right]. \tag{10}$$

(9)(10)分别是 $C_1>0, C<0$ 2 种情况的精确解.

需要指出的是，方程(9)中已将双曲函数整理成了对数函数表达式.该对数表达式正是电晕放电中有影响的汤姆逊(Thomson)公式，但汤姆逊公式仅仅考虑 $C_1>0$ 这一种情况，未考虑 $C<0$ 的情况，因此是不全面的.

还需要指出的是，$C<0$ 时的精确解(10)是著名的超越函数(Transcendental function)，完全确定出 C_1(作为 U_i 和 J 的函数)目前是不可能的.但是，在特殊参数条件下，利用近几十年发展起来的数值解法，则可确定出对应于这些特殊参数下的 C_1 值.进而通过边界条件和(5)(6)求出 C_2.从而再求出电场分布与空间电荷分布.

3　柱型料仓与同轴电晕导线之间电场分布精确解的再认识

精确解(5)(6)允许 U 和 C_1 取正负 2 种值，而大多数研究者在探讨电晕放电时却绝对地假定了 U 和 C_1 均取正值[2-7]. U 取正值是有情可原的，毕竟在物理学上正电晕更稳定.但是 C_1 仅取正值则是武断的，不全面的.下面笔者想从 U 和 C_1 取正负 2 种值的一般情况下，诠释其包含的物理含义.重新审视一下方程(4)，其物理含义是明显的，即电位沿半径方向的电位梯度就是半径方向上的电场强度绝对值.在内圆柱(电晕导线)表面处，即 $r=R_i$ 处，其电场强度设为 E_i，则容易得到

$$C_1 = \left[E_i^2 - \left(\frac{J}{2\pi\varepsilon_0\mu}\right)\right]R_i^2, \tag{11}$$

式中 E_i 为内圆柱即电晕导线表面的电场强度.

如果电晕放电过程中载流子从内柱面流向外柱面，正如大多数电晕装置中那样，则 $\frac{J}{\mu}$ 总是正的，且与电荷极性无关.那么，C_1 则理论上存在着为负值的可能性.

如果电晕放电过程中载流子从外柱面流向内柱面,则$\frac{J}{\mu}$总是负的,且与电荷极性无关,这时 C_1 总是正的.$|E_i|$必须超过电晕放电的起晕阈值$|E_{ic}|$方能产生电晕电流,这时可把相关实验测量值 J,μ 代入(11)式,就有可能得到 1 个正的 C_1.

可见,承认存在正负 2 种 C_1 值有着重要的理论意义.这可以更深入地理解单极性电晕电流下的静电物理学基础,而不能总是武断地限值 C_1 的单一取值.

应该注意,(11)式不仅仅是 C_1 的数学表达式,还有更深的物理含义,它已把前文提到的 Kaptsov 假设 $E_i=E_{ic}$包含其中,这一起晕条件已广泛应用于各种电晕放电理论模型中.实践中,该式把 E_i 变成了一个与 U_i 有关的已知常数,并可从 Peek 半球公式[1,4]中加以评估,或者从经验数据中加以评估.

方程(4)还可从电场强度与电位梯度的关系式写出另一种形式

$$\left(\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\right)^2=\left(\frac{J}{2\pi\varepsilon_0\mu}\right)+\frac{C_1}{r^2}. \tag{12}$$

该方程揭示出,电场强度沿 r 方向的幅值(在 C_1 是正值时)将随着 r 值的增加而反平方减少.对于线—板电极结构的静电除尘器中,线—板之间电场强度分布值的一个微弱的最小值已经观测到[8-10].C_1 是正值,电场存在最小值,说明电场分布一定是非轴对称结构,不可能出现在上述双圆柱轴对称的电极结构中.

参 考 文 献:

[1] PEEK F W, J R. dielectric phenomena in high voltage engineering[M]. New York: Mcgraw-Hill, 1929.
[2] TOWNSEND J S. The potential required to maintain currents between coaxial cylinders[J]. Philos Magn,1914,28:83-90.
[3] TOWNSEND J S. Electricity in gases[M]. Oxford: Clarendon Press,1915.
[4] WHITE H J. Industrial electrostatic precipitation[M]. Reading MA: Addison-wesley, 1963.
[5] COBINE J D. Electrical corona[M]. Berkeley: University of California, 1965.
[6] CROSS J A. Electrostatics: Principles, Problems and Application[M]. Bristol: Adam Hilger, 1987.
[7] THOMSON J J, Thomson G P. Conduction of electricity through gases[M]. London: Cambrghe University Press, 1933.
[8] MCDONALD J R, SMITH W B, SPENCER H W III. A mathematical model for calculating electrical conditions in wire-duct electrostatic precipitation devices[J]. J Appl Phys,1977,48:2231-2243.
[9] MEDLIN A J, FLETCHER C A J, MORROW R. A pseudotransient approach to steady state solution of electric field-space charge coupled problems[J]. J Electrostatics, 1998,43:39-60.
[10] ADAMIAK K. Simulation of corona in wire-duct electrostatic precipitator by means of the boundary element method[J]. IEEE trans Ind Appl, 1994,30(2):381-386.

(责任编辑:孟素兰)